

Classe : 4 _____ Nome e Cognome: _____ Data 17 marzo 2017

Svolgi il problema e **quattro** fra i cinque quesiti proposti. È obbligatorio indicare nella seguente griglia i quesiti svolti e che dovranno essere corretti dall'insegnante.

Quesito n.	Quesito n.	Quesito n.	Quesito n.
------------	------------	------------	------------

Problema

Un buon modello per descrivere la velocità di caduta di una goccia di pioggia molto piccola, assimilabile ad una sfera di diametro d con $d < 7,6 \cdot 10^{-5}$ m, è dato dalla seguente funzione:

$$v_1(t) = v_L (1 - e^{-\alpha \cdot t}),$$

dove v_L e α sono valori costanti che dipendono dal diametro della sfera.

Se la sfera ha diametro $d = 7,13 \cdot 10^{-65}$ m, il valore dei parametri è $v_L = 0,16$ m/s e $\alpha = 60$ s⁻¹.

Utilizzando i suddetti valori di v_L e α :

- Verifica che la velocità della goccia di pioggia è minore di v_L (definita velocità limite) per ogni $t \geq 0$; interpreta dal punto di vista fisico il risultato ottenuto;
- Calcola dopo quanto tempo dall'istante $t = 0$ la goccia di pioggia raggiunge una velocità pari al 90% della velocità limite v_L (*tieni conto del corretto numero di cifre significative*).
- Disegna, motivando opportunamente la procedura seguita, il grafico della velocità $v(t)$ in funzione del tempo ($t \geq 0$), tenendo conto anche di quanto calcolato al punto (b) (usa come unità di misura dell'asse delle ascisse 5 ms).

Per gocce di pioggia aventi diametro $d > 1,22 \cdot 10^{-3}$ m, il modello precedentemente descritto non è adeguato e si verifica invece che un buon modello per descriverne la velocità è data dalla funzione:

$$v_2(t) = v_{L'} \cdot \frac{e^{\beta \cdot t} - 1}{e^{\beta \cdot t} + 1},$$

dove $v_{L'}$ e β sono parametri che, per una goccia di diametro $d = 1,7 \cdot 10^{-3}$ m, assumono i seguenti valori: $v_{L'} = 6,0$ m/s e $\beta = 3,0$ s⁻¹.

Utilizzando i suddetti valori di $v_{L'}$ e β :

- Verifica che la velocità della goccia di pioggia è minore di $v_{L'}$ (velocità limite) per ogni $t \geq 0$.
- Calcola dopo quanto tempo la velocità della goccia, secondo quest'ultimo modello, è il 90% della velocità limite $v_{L'}$ (*tieni conto del corretto numero di cifre significative*).

Quesito 1

Risolvi sia analiticamente che graficamente la seguente disequazione logaritmica (descrivi l'insieme delle soluzioni usando valori esatti):

$$2 \log_2(x+1) \geq 3 - \log_{\frac{1}{2}} x$$

Quesito 2

Determina nell'intervallo $[0, 2\pi]$, il dominio della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos x + \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{2\sqrt{3} \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}}$$

Quesito 3

Considera la seguente funzione goniometrica:

$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(\pi + x) - \sin(x - \pi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) - \sin\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)}$$

- Determina il dominio \mathcal{D} di f .
- Rappresenta i grafici delle funzioni $y = f(x)$ e $y = f(|x|)$ dopo aver verificato che in \mathcal{D} si ha $f(x) = \cos x - \sin x$.

Quesito 4

Un gruppo di 8 amici, formato da quattro coppie sposate, fra cui Anna e Luca, si siedono in ordine su una panchina:

- calcola in quanti modi N_A si possono disporre, se ognuno vuole sedersi vicino al proprio partner;
- calcola in quanti modi N_B si possono disporre gli 8 amici se Anna e Luca hanno litigato e non vogliono sedersi vicino.

Motivare adeguatamente le risposte.

Quesito 5

Sono assegnate due urne che contengono palline colorate: l'urna U_1 contiene 1 pallina bianca, 2 nere e 3 verdi, l'urna U_2 contiene 3 palline bianche, 1 nera e 2 verdi.

Si lancia un dado e se esce 3 o 4 si estrae una pallina dall'urna U_1 , altrimenti si estrae una pallina dall'urna U_2 .

- Sapendo che la pallina estratta è verde, calcola la probabilità che sia stata estratta dall'urna U_1 .
- Sapendo che la pallina estratta è bianca, calcola la probabilità che sia stata estratta dall'urna U_2 .

Motivare adeguatamente le risposte.

È consentito l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile.

Non scrivere nulla nella tabella sottostante.

	P1	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	punteggio massimo totale	voto
Punti	40	15	15	15	15	15	100	

Il punteggio viene attribuito in base alla correttezza e completezza della risoluzione dei vari problemi/quesiti, nonché alle caratteristiche dell'esposizione (chiarezza, ordine, struttura).

La sufficienza si ottiene con il punteggio minimo di 55 punti.