M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

SIMULAZIONE DELLA II PROVA A.S. 2017-18: Liceo Fermi, 17 maggio 2018

Indirizzi: LI02 – SCIENTIFICO, LI03- SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

Nome e cognome del candidato ______________________	Classe ____________
Il candidato risolva uno dei due problemi; il problema da correggere è il numero ______________	

PROBLEMA 1

Una delle poltrone del noto designer Stefan Heiliger, chiamata "Balance", si può osservare in figura 1. Essa si compone di una struttura in metallo che funge da sostegno, una superficie sulla quale ci si può sdraiare e un poggiatesta.

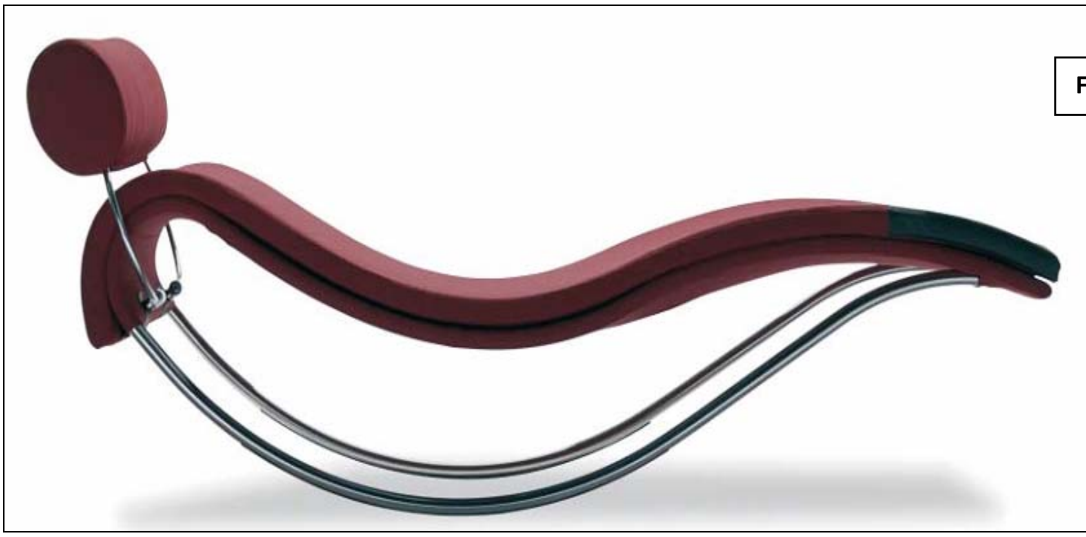


Figura 1

Supponiamo che la poltrona sia in equilibrio, come mostrato in figura 1. Ciascuno dei due elementi della struttura metallica può essere modellizzato per mezzo di tre funzioni: f (tratto da A a O), g (tratto da O a E) ed h (tratto da E a B), come descritto in figura 2. L'unità di misura sugli assi è di 1 decimetro.

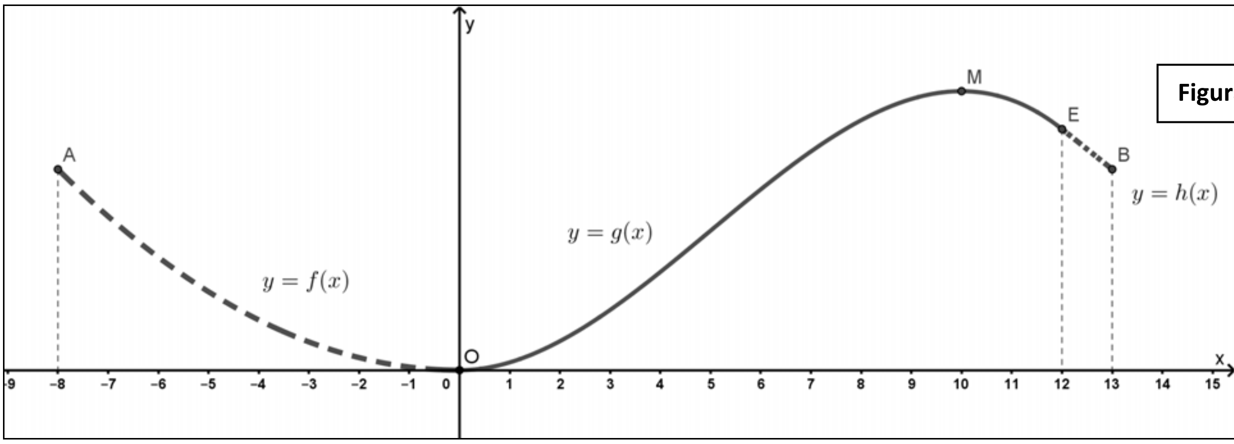


Figura 2

1. La parte sinistra della struttura metallica, come rappresentato in figura 2, può essere descritta per $x \in [-8, 0]$ dalla funzione $f(x) = \dfrac{1}{16}x^2$.

   Per $x \in [0,\ 12]$, il profilo può essere descritto da una funzione razionale intera di terzo grado $y = g(x) = \dfrac{1}{90}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)$. Il grafico di tale funzione ha pendenza nulla nell'origine O ed inoltre g assume valore massimo nel punto $M\left(10, \dfrac{50}{9}\right)$. Determina l'equazione della funzione g.

Durata massima della prova: 5 ore. È consentito l'uso delle calcolatrici scientifiche e/o grafiche (purché non dotate di capacità di calcolo simbolico) elencate nella Nota MIUR 5641 del 30.03.2018 richiamata dall'O.M. n.350 art. 18 comma 9 del 02.05.2018.

2. La struttura metallica all'estremità destra è costituita da un connettore piatto che può essere descritto per $x \in [12,\ 13]$ dalla funzione $y = h(x)$.

   Tale connettore si aggancia in E al tratto precedente in modo che il profilo non presenti spigolosità.

   Dopo aver trovato l'espressione analitica della funzione h,

   - calcola a quale altezza viene agganciato questo componente e determina l'ampiezza dell'angolo acuto β che esso forma con la direzione negativa dell'asse delle x,
   - calcola a quale altezza da terra si trova l'estremità destra B della struttura metallica, verificando che essa si trova alla stessa distanza da terra dell'estremità sinistra A.

3. Grazie a minuscoli blocchi cuneiformi incorporati in O nella struttura metallica, essa può oscillare solo in avanti, ossia verso destra con riferimento alla figura 3, per poi ritornare nella posizione di equilibrio. L'oscillazione massima si ha quando l'estremità destra B della struttura metallica entra in contatto con il terreno (in questo caso il punto O si solleva dal terreno e il punto di contatto tra la struttura metallica e il terreno viene a trovarsi nel punto indicato con G).

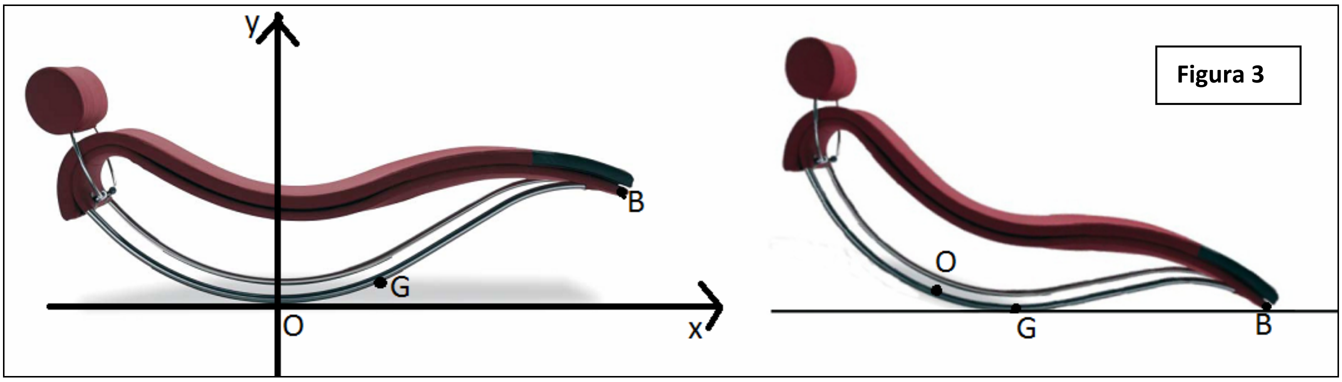


Figura 3

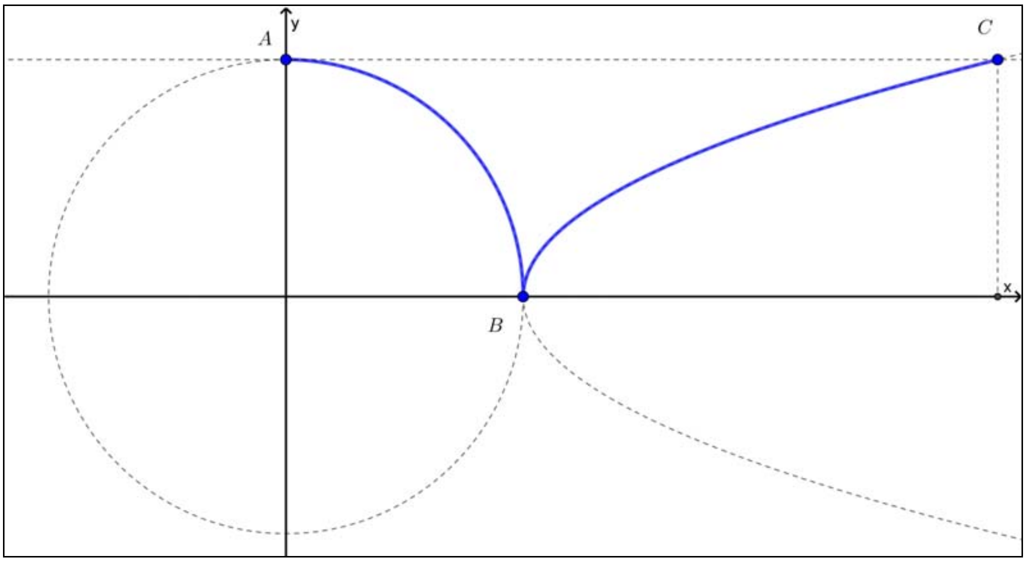
   Calcola, nel sistema di riferimento in cui la poltrona è in equilibrio, l'ascissa del punto G e la massima ampiezza α dell'oscillazione che la poltrona può compiere. È richiesto il valore esatto di x_G ; a titolo di conferma si fornisce un'approssimazione di x_G: $x_G \simeq 1.1$ (con più decimali è $x_G = 1.07738...$); il valore di α è richiesto solo in forma approssimata in gradi sessadecimali e per trovarlo si utilizzi il valore approssimato di x_G .

4. La linea di produzione della poltrona "Balance" genera costi fissi mensili (manodopera, manutenzione dei macchinari, ecc.) pari a 10 000 €; per quanto riguarda i costi variabili (dovuti al costo delle materie prime utilizzate, ecc.), essi sono quantificabili in 250 € per ogni unità prodotta più un ulteriore costo, espresso in euro, numericamente pari al 4% del quadrato del numero di unità prodotte.
   Scrivi l'espressione del costo totale (mensile) $C = C(x)$ in funzione del numero x di unità prodotte in un mese e l'espressione del costo unitario $C_u = C_u(x)$, ossia del costo per unità prodotta.
   Sapendo che la linea di produzione della poltrona "Balance" può fabbricare al massimo 600 pezzi al mese, determina il valore $x_{\substack{\text{minimo}\\ \text{costo unitario}}}$ di x che rende minimo il costo unitario.

   Il ricavo dovuto alla vendita della poltrona "Balance" è, espresso in euro, pari a $R(x) = 2500x - \frac{1}{200}x^3$ in funzione del numero x di unità prodotte - e vendute; il prezzo di listino della poltrona "Balance" è di 2500 €, ma alcune iniziative promozionali o sconti praticati in situazioni particolari, quali vendite di grossi volumi, fanno sì che il ricavo non sia semplicemente pari a $2500x$.
   Ricordando che la linea di produzione della poltrona "Balance" può fabbricare al massimo 600 pezzi al mese e facendo riferimento al costo totale (mensile) $C = C(x)$, determina il valore $x_{\substack{\text{massimo}\\ \text{guadagno}}}$ di x che rende massimo il guadagno (mensile).

PROBLEMA 2

Considera la funzione $y = f(x)$ il cui grafico, riportato in figura, è costituito dai punti con ordinata positiva o nulla e ascissa positiva o nulla della circonferenza γ_1 con centro nell'origine e dai punti con ordinata positiva o nulla e ascissa minore o uguale di $x_C = 6$ della parabola γ_2 di vertice B e asse di simmetria coincidente con l'asse delle x.



1. Sapendo che il massimo assoluto della funzione f è 2, determina l'espressione analitica di f; indichiamo con $\mathcal{D}_f$ il dominio di f.

2. Sia $g(x) = f'(x)$; rappresenta il grafico di g e specifica in modo chiaro tutte le informazioni che puoi determinare su g, in particolare dominio $\mathcal{D}_g$, segno e zeri, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti singolari/di discontinuità, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo e minimo relativo e i corrispondenti massimi e minimi relativi, insieme delle immagini.

   Sia $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ con $x \in \mathcal{D}_f$; rappresenta il grafico di F e specifica in modo chiaro tutte le informazioni che puoi determinare su F, in particolare i valori assunti da F agli estremi del dominio, segno e zeri, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo e minimo relativo e i corrispondenti massimi e minimi relativi, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di flesso, insieme delle immagini.

   Nota: le espressioni analitiche di *g* e *F* non sono richieste. Si chiede di rappresentare i due grafici di *g* e *F* in due piani cartesiani distinti.

3. Sia $\mathcal{S}$ il sottografico di f, ossia $\mathcal{S} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 6 \wedge 0 \le y \le f(x)\right\}$ e sia $\mathcal{W}_1$ il solido generato dalla rotazione completa di $\mathcal{S}$ attorno all'asse delle x e sia $\mathcal{W}_2$ il solido generato dalla rotazione completa di $\mathcal{S}$ attorno all'asse delle y. Calcola il volume dei solidi $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$.

4. Sia ℓ la funzione ottenuta estendendo per periodicità la funzione $u(x) = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{2}x\right)$ a $\mathbb{R}$; giustificando la procedura seguìta, rappresenta la funzione $y = \ell(x)$ per $0 \le x \le 24$.
   Ammettiamo che la funzione ℓ sia un buon modello per descrivere il livello del mare in una certa località, essendo tale livello variabile per effetti di marea, in cui sull'asse x si misurano i tempi in ore e sull'asse y si misura in metri il livello del mare rispetto alla quota 0 scelta in corrispondenza del livello del mare durante la bassa marea.

   Calcola con una approssimazione al centimetro il livello <u>medio</u> del mare:

   - tra un'alta e una bassa marea,
   - tra due basse maree.

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

SIMULAZIONE DELLA II PROVA A.S. 2017-18: Liceo Fermi, 17 maggio 2018

Indirizzi: LI02 – SCIENTIFICO, LI03- SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

Nome e cognome del candidato ______________________	Classe ____________				
Il candidato risolva cinque dei dieci quesiti; i quesiti da correggere sono i numeri:	___	___	___	___	___

1. Sia $y = f(x)$ una funzione definita su $\mathbb{R}$, ovunque derivabile e con derivata continua. Inoltre è noto che il grafico di f passa per l'origine e che in tale punto la retta tangente r al grafico di f ha equazione $r: y = 3x$.

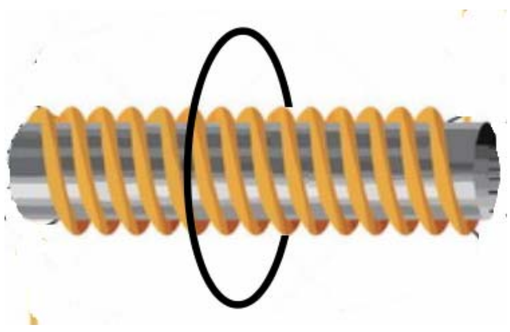
   Calcola $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_x^{x^2} f(t)\,dt}{x^2}$.

2. Determina l'equazione della superficie sferica S passante per il punto $A(2,-1,1)$ e tangente in $B(6,2,-2)$ al piano α: $5x + z - 28 = 0$.

3. Il numero di visite mediche che un italiano di età superiore a 50 anni compie in un anno è una variabile aleatoria X che segue una distribuzione di Poisson. È noto che la probabilità che in un anno un individuo di questa classe di età compia <u>almeno</u> una visita vale 0.37.
   Determina il numero medio di visite in un anno e calcola la probabilità che in un anno un individuo <u>al massimo</u> effettui tre visite.

4. Considera la funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$ e sia W il solido descritto nel séguito: la base di W è la seguente regione $\mathfrak{D}$ del piano: $\mathfrak{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0 \ \wedge \ 0 \leq y \leq f(x)\right\}$, ossia la regione costituita dai punti del sottografico di f contenuti nel primo quadrante. Le sezioni di W con piani perpendicolari all'asse x in un punto a distanza x dall'asse y sono rettangoli la cui altezza misura $h(x) = e^x$. Calcola il volume V del solido W, constatando come esso sia finito nonostante il solido sia illimitato.

5. Un lungo solenoide, di sezione $A = 2.00 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$, presenta una densità di spire pari a $n = 9.00 \cdot 10^3\ \mathrm{m}^{-1}$; a partire dall'istante $t_0 = 0$, la corrente nel solenoide varia in accordo alla legge $i(t) = \left(0.160\ \mathrm{A/s}^3\right) t^3$ con t misurato in secondi. Un'altra spira è concentrica al primo solenoide e perpendicolare al suo asse. Calcola, in valore assoluto,



   - il valore della forza elettromotrice ε indotta nella spira nell'istante t_1 in cui nel solenoide la corrente vale $3.20\ \mathrm{A}$,
   - la quantità di carica ΔQ che ha attraversato una sezione del conduttore costituente il solenoide tra gli istanti t_0 e t_1.

Costanti: La permeabilità magnetica del vuoto $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$.

6. Determina le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $y = f(x) = \ln x - \ln^2 x$ condotte dal punto $Q(0,1)$.

7. La lunghezza $\ell = \ell(t)$ del lato di un cubo aumenta con velocità v costante pari a 1.2 cm/s. Calcola la velocità di variazione v_s della superficie totale S del cubo e la velocità di variazione v_V del volume V del cubo nell'istante t_1 in cui il lato del cubo misura 10 cm. Specifica le unità di misura.

8. È data la funzione $y = f(x) = \begin{cases} \sin x \cdot \ln(\sin x) & \text{se} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$ definita in $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   Studia la continuità e derivabilità di f e successivamente stabilisci il valore di verità delle seguenti affermazioni, riportando gli opportuni riferimenti teorici:

   A. l'insieme delle immagini di f è un intervallo;
   B. f è una funzione illimitata su I (ossia l'insieme delle immagini di f è un insieme illimitato);
   C. f ammette un punto stazionario interno ad I, ossia esiste $c \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tale che $f'(c) = 0$.

9. Sia k un parametro reale; calcola la distanza $f(k)$ tra il punto $P_k(1,\ k,\ k+3)$ e la retta $r: \begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$ e stabilisci per quale valore di k essa è minima.

10. Una classe mista è costituita da 25 individui, tra cui Anna. In un certo giorno di inizio pentamestre l'insegnante di matematica decide di cominciare ad interrogare e chiama tre persone, scegliendole casualmente. Sapendo che la probabilità p_1 che Anna venga interrogata è pari ai $\dfrac{23}{187}$ della probabilità p_2 che venga interrogato almeno un maschio, determina il numero dei maschi e delle femmine.