



Liceo Scientifico “E. Fermi”

Prantomath – breve prontuario di matematica per i test di ingresso

1 Numeri naturali e proprietà delle potenze

Ricorda la definizione di potenza e le proprietà delle potenze:

Si dice potenza di un numero un prodotto in cui i fattori sono tutti uguali fra loro.

$$5^4 = \underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5}_{4 \text{ volte}} \quad 3^5 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{5 \text{ volte}}$$

Il fattore che si ripete si dice **base**, il numero di volte in cui il fattore si ripete si dice **esponente**.

- Il **prodotto di potenze con la stessa base** si può scrivere come potenza avente per base la stessa base delle potenze di partenza e per esponente la **somma** degli esponenti.

$$\spadesuit \text{ Esempio} \quad 4 \times 4^5 \times 4^6 = 4^{1+5+6} = 4^{12}$$

- Il **quoziente di due potenze con la stessa base** si può scrivere come potenza avente per base la stessa base delle potenze di partenza e per esponente la **differenza** degli esponenti.

$$\clubsuit \text{ Esempio} \quad 5^8 : 5^5 = 5^{8-5} = 5^3$$

- La **potenza di una potenza** si può scrivere come potenza avente per base stessa base della potenza di partenza e per esponente il prodotto degli esponenti.

$$\heartsuit \text{ Esempio} \quad (6^2)^5 = 6^{(2 \times 5)} = 6^{10}$$

- Il **prodotto di due potenze con lo stesso esponente** si può scrivere come una potenza avente come base il prodotto delle basi e come esponente quello delle potenze di partenza.

$$\diamond \text{ Esempio} \quad 3^5 \times 6^5 = (3 \times 6)^5 = 18^5$$

- Il **quoziente di due potenze con lo stesso esponente** si può scrivere come una potenza avente come base il quoziente delle basi e come esponente quello delle potenze di partenza.

$$\odot \text{ Esempio} \quad 12^7 : 6^7 = (12 : 6)^7 = 2^7$$

Le cinque regole possono generalizzarsi: a, b, n, m siano numeri naturali

$a^m \times a^n = a^{m+n}$	prodotto di potenze con la stessa base
$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (m \geq n)$	quoziente di potenze con la stessa base
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	potenza di una potenza
$a^m \times b^m = (a \times b)^m$	prodotto di potenze con lo stesso esponente
$a^m : b^m = (a : b)^m$	quoziente di potenze con lo stesso esponente

Esercizio 1 Risolvi le seguenti potenze con la stessa base:

$$2^4 \times 2^6 = 2^{4+6} =$$

$$3 \times 3^2 \times 3 =$$

$$7^2 \times 7^3 \times 7 =$$

$$10^5 \times 10 =$$

$$7^{11} : 7^{10} =$$

$$2^3 : 2 =$$

$$5^8 : 5^6 =$$

$$10^{10} : 10^5 =$$

$$3 \times 3^2 = 3^{1+2} =$$

$$5^2 \times 5^3 =$$

$$8^2 \times 8^4 =$$

$$6 \times 6^3 \times 6^0 =$$

$$2^8 : 2^4 =$$

$$9^{14} : 9^{12} =$$

$$9^{36} : 9^{12} =$$

$$9^{14} : 9^5 =$$

Esercizio 2 Risolvi le seguenti potenze con lo stesso esponente:

$$2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4 =$$

$$2^5 \times 5^5 =$$

$$2^2 \times 4^2 \times 5^2 =$$

$$12^5 : 3^5 =$$

$$7^{11} : 7^{10} =$$

$$2^3 : 2 =$$

$$21^4 : 7^4 =$$

$$24^7 : 6^7 =$$

$$3^2 \times 5^2 = (3 \times 5)^2 =$$

$$7^3 \times 5^3 =$$

$$2^4 \times 5^4 \times 6^4 =$$

$$56^3 \times 7^3 =$$

$$2^8 : 2^4 =$$

$$9^{14} : 9^{12} =$$

$$19^8 : 19^8 =$$

$$125^3 : 25^3 =$$

Esercizio 3 Risolvi le seguenti potenze di potenze:

$$(2^2)^3 = 2^{2 \times 3} =$$

$$(2^5)^2 =$$

$$(7^0)^5 =$$

$$(4^4)^0 =$$

$$(10^3)^8 =$$

$$\{(7^5)^2\}^0 =$$

$$(3^4)^3 = 3^{4 \times 3} =$$

$$(1^6)^3 =$$

$$(3^{11})^4 =$$

$$(5^4)^{13} =$$

$$[(2^3)^2]^4 =$$

$$[(5^5)^{10}]^2 =$$

Esercizio 4 Scrivi sotto forma di un'unica potenza le seguenti espressioni, applicando le proprietà viste:

$$2^3 \times 2^2 \times 2^6 = \dots\dots\dots$$

$$5 \times 5^8 \times 5^2 = \dots\dots\dots$$

$$4^9 \times 4^2 : 4^{10} = \dots\dots\dots$$

$$9^7 : 9^4 \times 9^5 = \dots\dots\dots$$

$$10^{10} : 10^7 : 10^2 = \dots\dots\dots$$

$$(6^5)^4 : 6^{15} = \dots\dots\dots$$

$$(3^2 \times 3^4)^2 : (3^3 \times 3^5) = \dots\dots\dots$$

$$(8^7 : 8^5 : 8^0)^0 \times 8^3 = \dots\dots\dots$$

$$\{[(2^2)^2]^4\}^3 : 2^{45} = \dots\dots\dots$$

$$(6^3 \times 6^2 \times 6) : (6^9 : 6^7) = \dots\dots\dots$$

$$\{(9^{10} : 9^8)^0 \times (9^5 : 9)\}^4 = \dots\dots\dots$$

$$[(16^4 : 8^4) \times 2^5]^3 : 2^4 = \dots\dots\dots$$

Esercizio 5 Risolvi le espressioni utilizzando dove possibile le proprietà delle potenze:

$$2^3 + [4^2 - 2^3 + (5^2 - 2 \times 2^3)] \times 1^3 \quad [25]$$

$$3^3 - [(2^5 : 2^4)^2 + 2 \times 3^2] : (3^5)^0 + 6^2 \quad [41]$$

$$(8^3 : 4^3)^2 + [4^3 + 3^4 - (2^2)^3 - (5^2 \times 5^3 : 5^4) \times 2^4]^8 : 5 + [(10^2)^3]^0 \quad [14]$$

$$(3^2 \times 2^2)^7 \times \{[(6^7 : 6^5 \times 6^3)^2]^3 : 6^{28} \times (6^{12})^0\}^2 : (6^4 \times 6^5)^2 + (9^{15} : 9^{14})^2 : 3^2 \quad [10]$$

Esercizio 6 semplifica le espressioni, facendo uso ovunque possibile delle proprietà delle potenze

$$5^3 - 7 \times 3^2 + 17 \times 2 - 3 \times 2^4 - 2^3 + 2^2 \times 15 \quad [100]$$

$$5^5 : 5^4 + 28 : 2^2 - 7^3 : 7^2 + 6 \times 5 - 2 \times 3 \quad [29]$$

$$2^5 + 7 \times 2^2 - 3^3 - 2^2 \times 3 - 2^2 \times 5 + 2^2 \times 3^2 : 6 + 5^2 - 5^7 : 5^5 \quad [7]$$

$$7 \times 2^3 - 2^5 - 2^{10} : 2^7 - 2^{30} : 2^{27} + 3^2 \times 3^3 - 3^2 + 6^9 : 6^8 \quad [248]$$

$$9 \times 5^2 + 5^2 \times 7 - 3 \times 4^2 - 2^3 \times 5^2 - 6^2 \times 3 + 2^4 : 2^2 \quad [48]$$

$$2^7 : 2^6 + 9^2 - 4^{10} : 4^9 - (47 - 2 \times 3^2) - 2 \times 3 \times 5 \quad [20]$$

$$3 \times 5^2 - 2 \times (7^2 - 3^2 \times 5)^2 - (2^2 \times 7 - 5^5 : 5^3) \times 13 + 2 \times 3 \quad [10]$$

$$\{2^4 : (6^2 - 5 \times 2^2) + [(7 \times 3 + 3^4 - 2)^2 : 10^3] : (7^2 - 2^2 \times 11) - 2\}^5 \quad [1]$$

$$\{2 \times [2 \times 3^2 - 2 \times (3 \times 2^2 - 2 \times 5)^2 + (6 - 2^2) \times 2] - 3 \times 2^2\} : 2^2 - 1 \quad [3]$$

2 Scomposizioni in fattori, MCD e mcm

2.1 scomposizione in fattori

Esempi di scomposizioni in fattori:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \times 5 \\ 9 & 3^2 \\ 1 & \\ \hline 90 & = 2 \times 3^2 \times 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{l'ultima cifra è 0 il numero} \\ \text{è divisibile sia per 2 che per 5} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 114 & 2 \\ 57 & 3 \\ 19 & 19 \\ 1 & \\ \hline 114 & = 2 \times 3 \times 19 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{l'ultima cifra del numero è divisibile per due} \\ \text{la somma } 5 + 7 \text{ è divisibile per tre} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 288 & 2 \times 2 \\ 72 & 2 \times 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \times 3 \\ 1 & \\ \hline 288 & = 2^5 \times 3^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{le ultime due cifre del} \\ \text{numero sono divisibili per 4} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1980 & 2 \times 5 \\ 198 & 2 \\ 99 & 3^2 \\ 11 & 11 \\ 1 & \\ \hline 1980 & = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11 \end{array}$$

Esercizio 1 Scomponi in fattori primi i seguenti numeri:

$$\begin{array}{ll} 176 & 2^4 \times 11 \\ 312 & 2^3 \times 3 \times 13 \\ 636 & 2^2 \times 3 \times 53 \\ 840 & 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \\ 2520 & 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \\ 3150 & 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \end{array}$$

Esercizio 2 Scomponi i seguenti numeri in fattori primi:

$$\begin{array}{ll} 540 & 2^2 \times 3^3 \times 5 \\ 1485 & 3^3 \times 5 \times 11 \\ 3675 & 3 \times 5^2 \times 7^2 \\ 4200 & 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7 \\ 1440 & 2^5 \times 3^2 \times 5 \\ 13475 & 5^2 \times 7^2 \times 11 \end{array}$$

2.2 M.C.D e m.c.m.

Esempi di calcolo di massimo comune divisore e minimo comune multiplo

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3^2 \\ 1 & \\ \hline 27 & = 3^3 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 128 & 2^2 \\ 32 & 2^2 \\ 8 & 2^3 \\ 1 & \\ \hline 128 & = 2^7 \end{array}$$

$$\text{M.C.D.}(27, 128) = 1; \quad \text{m.c.m.}(27, 128) = 2^7 \times 3^3 = 3456$$

$$\begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5^2 \\ 1 & \\ \hline 125 & = 5^3 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3^3 \\ 1 & \\ \hline 243 & = 3^5 \end{array}$$

$$\text{M.C.D.}(125, 243) = 1; \quad \text{m.c.m.}(125, 243) = 3^5 \times 5^3 = 30375$$

$$\begin{array}{r|l}
 36 & 2^2 \\
 9 & 3^2 \\
 1 & \\
 \hline
 36 = 2^2 \times 3^2 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 48 & 2^2 \\
 12 & 2^2 \\
 3 & 3 \\
 1 & \\
 \hline
 48 = 2^4 \times 3 &
 \end{array}$$

$$\text{M.C.D.}(36, 48) = 2^2 \times 3 = 12;$$

$$\text{m.c.m.}(36, 48) = 2^4 \times 3^2 = 144$$

Esercizio 1 Calcola il M.C.D. ed il m.c.m. dei seguenti gruppi di numeri:

	M.C.D.	e	m.c.m.
30, 36	6	e	180
88, 132	44	e	264
72, 48	24	e	144
20, 45, 99	1	e	1980
140, 145, 170	5	e	69020
72, 220, 385	1	e	27720

Esercizio 2 Trova il m.c.m. tra le seguenti coppie o terne di numeri con il metodo della scomposizione in fattori primi (aiutandoti anche con la calcolatrice):

	M.C.D.	e	m.c.m.
20, 75	5	e	300
63, 147	21	e	441
12, 15, 18	3	e	180
882, 945	63	e	13230
441, 525, 567	21	e	99225
675, 392	1	e	264600
1050, 1125	75	e	15750
1452, 176	44	e	5808
1344, 1408	64	e	29568
1274, 728	182	e	5096

3 L'insieme dei razionali assoluti

Come è noto, ad ogni frazione corrisponde un numero decimale, che si ottiene dividendo il numeratore per il denominatore e vi sono tre tipologie di numeri decimali

- decimali finiti
- decimali illimitati periodici semplici
- decimali illimitati periodici misti

I numeri decimali che si possono scrivere anche come frazioni si fanno parte di un insieme che si chiama *insieme dei numeri razionali assoluti*. **L'insieme dei razionali assoluti si indica con il simbolo \mathbb{Q}^+ .**

Per capire a quale tipo di numero razionale dà origine una certa frazione, bisogna prima ridurre la frazione ai minimi termini e poi scomporne in fattori primi il denominatore. Infatti si trova che...

una frazione genera un <i>decimale finito</i> se il suo denominatore scomposto in fattori primi contiene solo dei 2, dei 5 e delle loro potenze	$\frac{9}{50} = 0,18$ [50 = 2 × 5 ²] $\frac{29}{20} = 1,45$ [20 = 2 ² × 5]
una frazione genera un <i>decimale periodico semplice</i> se il suo denominatore scomposto in fattori primi non contiene né 2 né 5 ma solo altri numeri primi	$\frac{14}{33} = 0,4\overline{2}$ [33 = 3 × 11] $\frac{10}{63} = 0,1\overline{58730}$ [63 = 3 ² × 7]
una frazione genera un <i>decimale periodico misto</i> se il suo denominatore scomposto in fattori primi contiene sia 2 e 5 che altri numeri primi	$\frac{13}{24} = 0,541\overline{6}$ [24 = 2 ³ × 3] $\frac{8}{45} = 0,1\overline{7}$ [45 = 3 ² × 5]

Esempio: classifica o seguenti numeri razionali assoluti e disponili in ordine crescente

$$1,5\overline{8}; 1,5\overline{8}; 1,58; 1,586; 1,5\overline{83}; 1,5\overline{83}; 1,58\overline{3}$$

$1,5\overline{8}$	decimale periodico semplice
$1,5\overline{8}$	decimale periodico misto
1,58	decimale finito
1,586	decimale finito
$1,5\overline{83}$	decimale periodico semplice
$1,5\overline{83}$	decimale periodico misto
$1,58\overline{3}$	decimale periodico misto

$$1,58 < 1,5\overline{83} < 1,5\overline{83} < 1,5\overline{83} < 1,5\overline{8} < 1,586 < 1,5\overline{8}$$

Dato un qualsiasi numero razionale, è sempre possibile trovare la frazione che lo genera seguendo le seguenti semplici regole:

La frazione che genera un decimale	ha come numeratore	e come denominatore	Esempi
finito	il numero stesso senza virgola	un "1" seguito da tanti "0" quante sono le cifre decimali	$1,23 = \frac{123}{100}$ $12,156 = \frac{12156}{1000} = \frac{3039}{250}$
illimitato, periodico semplice	la differenza fra il numero senza virgola e la parte intera, che precede il periodo	tanti "9" quante sono le cifre del periodo	$5,\bar{3} = \frac{53-5}{9} = \frac{16}{3}$ $2,\overline{54} = \frac{254-2}{99} = \frac{252}{99}$
illimitato, periodico misto	la differenza fra il numero senza virgola e la parte che precede il periodo	tanti "9" quante sono le cifre del periodo e tanti "0" quante sono le cifre dell'antiperiodo	$0,2\bar{3} = \frac{23-2}{90} = \frac{7}{30}$ $0,3\overline{245} = \frac{3245-32}{990} = \frac{3213}{990}$

3.1 Numeri decimali e frazioni

Per eseguire operazioni con i numeri decimali finiti possiamo procedere in due modi: operando direttamente con i numeri decimali oppure operando e con le frazioni corrispondenti: i due risultati coincidono. Procedendo in entrambi i modi indicati calcoliamo il valore della seguente espressione

$$1^{\circ} \text{ modo} \quad 0,5 + 15,6 \times 0,1 - 0,3 = 0,5 + 1,56 - 0,3 = 1,76$$

$$2^{\circ} \text{ modo} \quad 0,5 + 15,6 \times 0,1 - 0,3 = \frac{5}{10} + \frac{156}{10} \times \frac{1}{10} - \frac{3}{10} = \frac{50 + 156 - 30}{100} = \frac{176}{100} = 1,76$$

Per eseguire operazioni con i numeri decimali periodici è invece necessario sostituire a tutti i numeri decimali le corrispondenti frazioni generatrici.

Esempio: calcoliamo il valore della seguente espressione

$$2,\bar{3} + 0,1\bar{6} - 0,\bar{7} : 1,\bar{6} = \frac{23-2}{9} + \frac{16-1}{90} - \frac{7}{9} : \frac{16-1}{9} = \frac{21}{9} + \frac{15}{90} - \frac{7}{9} : \frac{15}{9} = \frac{7}{3} + \frac{1}{6} - \frac{7}{15} = \frac{70+5-14}{30} = \frac{61}{30}$$

Esercizio Trasforma i seguenti numeri decimali nelle corrispondenti frazioni:

0,024;	$\frac{3}{125}$
0,00047	$\frac{47}{100000}$
$1,\bar{3}$	$\frac{4}{3}$
$53,\bar{2}$	$\frac{479}{9}$
$0,0\bar{5}$	$\frac{1}{18}$
15,03	$\frac{1503}{100}$
232,75	$\frac{931}{4}$
$2,\overline{35}$	$\frac{233}{99}$
$2,3\bar{5}$	$\frac{106}{45}$
$4,\overline{623}$	$\frac{4619}{999}$

Esercizio 2 Calcola il valore delle seguenti espressioni dopo aver trasformato i numeri decimali nelle frazioni corrispondenti

$$(0,3 + 0,5 \times 7) : 0,0\bar{6} \quad [57]$$

$$2,1 : 1,\bar{3} + 7 - 0,4 \times 0,\bar{6}\bar{3} \times 2,5 - 0,\bar{6} \times (4 - 0,\bar{4}\bar{5}) + 0,425 \quad [6]$$

$$(2 + 0,\bar{3}) : [(0,75 - 0,\bar{3}) \times (2 - 1,2) + 1,08\bar{3} : (4 + 0,\bar{3})] \quad [4]$$

$$(1 - 0,1\bar{6}) : (1,3 - 0,4\bar{6}) - (0,35 + 0,1\bar{3} + 0,91\bar{6}) : (1 + 0,4) \quad [0]$$

$$1,\bar{3} : (1 + 0,\bar{6}) \times 0,1\bar{6} - 3 \times (0,1 + 0,0\bar{6})^2 - 0,8\bar{3} \quad \frac{1}{30}$$

$$\{1,2 - [0,7 + 0,41\bar{6} \times 0,48]^2 : (0,\bar{6})^2 - (0,\bar{2})^2\}^2 \times 12,5 \quad [8]$$

$$\frac{3,5 + 1,0\bar{3}\bar{7} \times 2,25}{1,1\bar{6} + 2,5 \times 0,7} \quad [2]$$

4 L'insieme dei razionali relativi

L'insieme dei numeri razionali assoluti, \mathbb{Q}^+ è costituito da tutti i numeri che sono esprimibili come frazioni come visto nel paragrafo precedente.

Se i numeri razionali sono dotati di un segno, si parla di numeri razionali relativi: l'insieme dei numeri razionali relativi, o più semplicemente dei numeri razionali, si indica con il simbolo \mathbb{Q} .

Ciascun numero razionale è dotato di un segno e di un valore assoluto. Esempi

$$-\frac{2}{3} \quad \begin{array}{l} - \text{ segno} \\ \frac{2}{3} \text{ valore assoluto} \end{array} \quad +0,5\bar{6} \quad \begin{array}{l} + \text{ segno} \\ 0,5\bar{6} = \frac{17}{30} \text{ valore assoluto} \end{array}$$

È possibile stabilire una relazione d'ordine fra i numeri razionali e valgono le semplici regole

- ① Il numero zero è l'unico razionale privo di segno: zero è minore di ogni numero positivo e maggiore di ogni numero negativo
- ② Ogni numero negativo è minore di ogni numero positivo
- ③ Due numeri relativi sono uguali se hanno uguale segno ed uguale valore assoluto
Per esempio: -5 e $-\frac{15}{3}$ sono uguali perché hanno uguale segno, negativo, inoltre
$$|-5| = 5 \text{ e } \left|-\frac{15}{3}\right| = 5$$
- ④ Di due numeri positivi disuguali è minore quello che ha valore assoluto minore
Per esempio: $+6 < +8$ perché $|+6| < |+8|$
- ⑤ Di due numeri negativi disuguali è minore quello che ha valore assoluto maggiore
Per esempio: $-12 < -10$ perché $|-12| > |-10|$

È possibile ordinare i numeri razionali su una retta, facendo corrispondere ad ogni numero razionale un punto della retta in modo univoco, a patto di avere fissato un'origine, una unità di misura e un orientamento (quest'ultimo, indicato con una "freccina", indica il verso in cui i numeri crescono). Valgono le seguenti osservazioni

- ① Al punto O, l'origine, corrisponde il numero zero
- ② Due numeri discordi hanno per immagine geometrica due punti che sono situati da parti opposte rispetto all'origine
- ③ Due numeri concordi hanno per immagine geometrica due punti che sono situati dalla stessa parte rispetto all'origine
- ④ Due numeri opposti hanno per immagine geometrica due punti corrispondenti nella simmetria di centro l'origine
- ⑤ Notazione sincopata: possiamo identificare i numeri relativi positivi con i numeri assoluti quindi potremo omettere il segno "+" davanti ai numeri positivi

Per esempio: la scrittura 2 equivale a +2

Esercizio 1 Su una retta orientata r , dopo aver fissato l'origine O l'unità di misura u e l'orientamento, rappresenta i punti immagine dei seguenti numeri relativi :

$$\begin{array}{l} -6; +5; +2; -4; -\frac{5}{2}; +\frac{1}{2} \\ +4; -3; -\frac{9}{2}; +0,5; +\frac{13}{4}; +\frac{3}{2} \\ +\frac{7}{2}; -\frac{11}{3}; -5; +2; -\frac{5}{2}; 0; -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \left[-6 < -4 < -\frac{5}{2} < +\frac{1}{2} < +2 < +5\right] \\ \left[-\frac{9}{2} < -3 < +0,5 < +\frac{3}{2} < +\frac{13}{4} < +4\right] \\ \left[-5 < -\frac{11}{3} < -\frac{5}{2} < -1 < 0 < +2 < +\frac{7}{2}\right] \end{array}$$

Esercizio 2 Disponi in ordine crescente i seguenti numeri relativi :

$$\begin{array}{ll}
+\frac{1}{2}; -1; -\frac{3}{2}; 0; -4; +\frac{3}{4} & [-4 < -\frac{3}{2} < -1 < 0 < +\frac{1}{2} < +\frac{3}{4}] \\
+4; -3; -\frac{9}{4}; +0,5; +\frac{4}{3}; +\frac{3}{2} & [-3 < -\frac{9}{4} < +0,5 < +\frac{4}{3} < +\frac{3}{2} < +4] \\
-3; +\frac{1}{2}; +\frac{7}{3}; -9; -1; +4; -\frac{7}{2}; -\frac{9}{5}; -7; +5 & [-9 < -7 < -\frac{7}{2} < -3 < -\frac{9}{5} < -1 < +\frac{1}{2} < +\frac{7}{3} < +4 < +5]
\end{array}$$

Esercizio 3 Semplifica le seguenti espressioni con i numeri relativi

$$3.1 \quad -\frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \left(5 + \frac{1}{3} - 1\right) + \left(-2 + \frac{3}{2}\right) \quad [-5]$$

$$3.2 \quad \left(-1 + \frac{11}{15} + \frac{1}{6}\right)^2 : \left(-\frac{10}{3} - \frac{3}{5} + \frac{23}{6}\right) \quad \left[-\frac{1}{10}\right]$$

$$3.3 \quad \left[\left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{10}\right)\right]^3 + \left(-\frac{2}{15}\right)^2 : \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)^2 \quad \left[\frac{17}{12}\right]$$

$$3.4 \quad \left(1 - \frac{7}{15}\right) : \left[\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) - \left(-\frac{5}{9} + \frac{7}{15}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{3} + \frac{7}{6}\right)\right] \quad \left[\frac{2}{7}\right]$$

$$3.5 \quad \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^2 : \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] \quad \left[-\frac{1}{2}\right]$$

$$3.6 \quad \left[\frac{1}{3} + 1 + \left(-\frac{2}{3} - 1\right)\right] - \left\{-\frac{1}{2} - \left[-2 + \left(-1 - \frac{1}{3}\right)\right]\right\} \quad \left[\frac{5}{2}\right]$$

$$3.7 \quad \left[\left(\frac{1}{27} + \frac{1}{6}\right) : \left(1 - \frac{19}{30} - \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{9}\right] : \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) : \left(1 - \frac{4}{9}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{35}{6}\right)\right] \quad \left[-\frac{70}{9}\right]$$

$$3.8 \quad \left(-1 - \frac{5}{24} + \frac{7}{12}\right) : \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{5}{8}\right) : \left(-\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{5}\right) - \left(1 + \frac{7}{3}\right)\right] \quad \left[-\frac{3}{4}\right]$$

$$3.9 \quad \frac{\left(3 - \frac{7}{3}\right) - \left[-3 : \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)^2\right]}{\left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^2 : \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^2\right]} \quad \left[\frac{-\frac{19}{12}}{-\frac{1}{2}} = \frac{19}{6}\right]$$

$$3.10 \quad \frac{\left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{13}{14} - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) + \frac{7}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{5}{3} - \frac{5}{4}\right) : \left(-\frac{5}{3}\right) - 12 \cdot \left(\frac{13}{20} - \frac{2}{3}\right)} \quad \left[-\frac{11}{3}\right]$$

5 Espressioni letterali ed equazioni

5.1 Espressioni letterali

Come è noto, un'espressione letterale è una scrittura algebrica in cui compaiono sia numeri che lettere: queste ultime giocano il ruolo di "contenitori", variabili che possono assumere una molteplicità di valori, come nella formula dell'area del triangolo

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Esercizio Calcola il valore delle espressioni per i valori delle lettere che sono indicati a fianco:

espressione	valori delle lettere	valore dell'espressione
	$a = -1, b = +3$	$2 \cdot (-1) + (+3) - (-1)^2 + 1 = -2 + 3 - 1 + 1 = +1$
$2a + b - a^2 + 1$	$a = -2, b = 0$	
	$a = \frac{1}{2}, b = 1$	
	$x = 2, y = +3$	
$4x - 3y + 2xy - 2$	$x = 0, y = \frac{1}{3}$	
	$x = -1, y = -\frac{1}{2}$	
Riflettiamo sulle regole delle potenze dei numeri relativi : $\begin{cases} (-) \text{ potenza pari} = + \\ (-) \text{ potenza dispari} = - \end{cases}$		
$-(-1)^2 = +1$	<input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F	$(-1)^3 = +1$ <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F
$-(+1)^2 = -1$	<input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F	$-(-1)^3 = +1$ <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F

Esercizio Dal linguaggio alla scrittura in simboli :

proposizione	equazione
La somma tra la metà di x e 5 è uguale a 7	$\frac{1}{3}x = 2$
La somma tra la metà di x e la metà di 5 è uguale a 7	
La metà della somma tra x e 5 è uguale a 12	
La differenza tra x e 8 è uguale a 2	

x supera 8 di 2
y supera di 1 il doppio di 3
y supera di 1 il quadrato di 3
La differenza tra il quadrato di x e il quadrato di 5 è uguale a 1
Il quadrato della differenza tra 5 e x è uguale a 1
La differenza tra x e il quadrato di 5 è uguale a 1
La media aritmetica di y e 8 è uguale al quadrato di y

Esercizio Traduci le proposizioni in equazioni o viceversa

proposizione	equazione
Un terzo di x uguale a 2	$\frac{1}{3}x = 2$
Il successivo di x uguale a 20	
Il doppio di x uguale a 5	
Il doppio del successivo di x uguale a 12	
Il successivo del doppio di x uguale a 7	
La differenza tra x e 41 uguale a 9	
	$3x = \frac{1}{2}$
Il quadrato della somma di x e di -1 uguale alla somma del quadrato di x e di 4	
	$\frac{1}{2}x = 7$
	$(x + 1)^2 = 16$

5.2 Equazioni

Ricorda le definizioni sulle equazioni

- Si dice equazione in un'incognita, un'uguaglianza tra due espressioni contenenti una lettera detta incognita che diventa vera solo per particolari valori dell'incognita; tali valori si chiamano soluzioni dell'equazione.
- Un'equazione lineare (detta anche di I grado) è un'equazione in cui l'incognita ha esponente massimo pari a 1.
- Due equazioni si dicono *equivalenti* quando ammettono lo stesso *insieme* di soluzioni.
- un'equazione lineare (di primo grado) si dice *ridotta in forma normale* quando assume l'aspetto

$$ax = b \quad \text{con } a \text{ e } b \text{ numeri interi}$$

Valgono poi le regole riassunte di seguito, che permettono di disporre l'equazione in forma normale e in seguito di discuterne la soluzione

I principio di equivalenza: di un'equazione si trasforma in un'equazione equivalente se si aggiunge a entrambi i membri lo stesso numero o lo stesso polinomio.

II principio di equivalenza: di un'equazione si trasforma in un'equazione equivalente se si moltiplicano o si dividono entrambi i membri per una stessa espressione *diversa da zero*

Se $a \neq 0$ nella forma normale: l'equazione è *determinata* e la sua soluzione è $x = \frac{b}{a}$

Se $a = 0$ nella forma normale: l'equazione è *singolare* e non ammette una soluzione. L'equazione è indeterminata se $a = 0$ e $b = 0$, è impossibile se $a = 0$, ma $b \neq 0$

Esercizio 1 Verifica le seguenti uguaglianze:

uguaglianza	valori	Sostituisci nell'uguaglianza i valori indicati a fianco, esegui i calcoli e scrivi se l'uguaglianza ottenuta è vera o falsa	Individua, tra i valori che hai sostituito, quelli che rendono vera l'uguaglianza
$x - 6 = 3x + 4$	$x = -3$ <hr/> $x = -4$ <hr/> $x = -5$	$-3 - 6 = 3 \cdot (-3) + 4 \Rightarrow -9 = 5$ uguaglianza falsa	$x = 5$
$x(x + 1) = 3x + x^2 + 2$	$x = 1$ <hr/> $x = -1$ <hr/> $x = 2$		
$3(y + 4) = 4y + 4$	$y = -2$ <hr/> $y = 8$ <hr/> $y = 3$		
$a(a - 3) = a^2$	$a = 0$ <hr/> $a = -1$ <hr/> $a = 1$		

Esercizio 2 Completa la tabella per righe come negli esempi

equazione	applica il primo principio	somma i monomi simili	insieme delle soluzioni
$x - 5 = 7$	$x = 5 + 5 = 7 + 5$ (addiziono 5 a entrambi i membri)	$x = 12$	$S = \{12\}$
$4x + 3 = 3x + 13$	$4x + 3 - 3x - 3 = 3x + 13 - 3x - 3$ (addiziono $-3x - 3$ a entrambi i membri)	$x = 10$	$S = \{10\}$
$x + 7 = 10$			
$9x = 8x + 10$			
$5x + 7 = 4x - 3$			
$7 - 3x = 5 - 4x$			
$7 - 7x = 8 - 8x$			
$3x + 4 = 2x + 4$			

Esercizio 3 Completa la tabella per righe come negli esempi

equazione	applica il secondo principio	riduci	insieme delle soluzioni
$2x = 3$	$\frac{2x}{2} = \frac{3}{2}$ (divido per 2 entrambi i membri)	$x = \frac{3}{2}$	$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$
$\frac{x}{5} = 4$	$5 \cdot \frac{x}{5} = 4 \cdot 5$ (moltiplico per 5 entrambi i membri)	$x = 20$	$S = \{20\}$
$5x = -8$			
$\frac{x}{2} = 3$			
$-6x = 0$			
$-\frac{x}{2} = 3$			
$\frac{1}{34}x = \frac{1}{17}$			
$-x = 21$			

Esercizio 4 Completa la tabella per righe come negli esempi

equazione	riduci nella forma normale $ax = b$	classifica l'equazione (determinata /indeterminata /impossibile)
$x-3=x-2 + 4x + 3$	$x - 3 = 5x + 1; x - 5x = 1 + 3$	FN: $-4x=4$ determinata
$x + 3 = -(x + 2) + 2x + 5$	$x + 3 = x + 3$	FN: $-0x=0$ indeterminata
$-(x - 3) - (x - 2) = -2x + 1$	$-2x + 5 = -2x + 1$	FN: $-0x=5$ impossibile
$3(x - 1) = -(3x - 1) + 6x - 4$		
$2(y + 2) - (2y + 5) = -y$		
$\frac{x-3}{2} - \frac{x-1}{3} + 1 = \frac{x}{6} - 1$		
$\frac{x-5}{2} - \frac{3x-1}{4} = \frac{2x-1}{8} - 3$		

Esercizio 5 Completa la tabella per righe come negli esempi

equazione	riduci in forma normale	classifica e scrivi l'insieme delle soluzioni
$3x - 12 = \frac{1}{2}(2 - x) + 1$	$6x - 24 = 2 - x + 2$ FN: $7x = 28$	determinata, $x = \frac{28}{7}$ $S = \{4\}$
$3(x - 1) = 4(x - 3) + 2 - x + 7$	$3x - 3 = 4x - 12 + 2 - x + 7$ FN: $0x = 0$	indeterminata, $S = \{\forall x\}$
$3(2 - x) = 2(3 - x) + 7 - x$	$6x - 3x = 6 - 2x + 7 - x$ FN: $0x = 7$	impossibile, $S = \{\}$
$2(x - 3) - 7(2 - x) = x + 4$		
$\frac{2y-1}{3} - \frac{y-3}{4} - 1 = \frac{5y+2}{12}$		
$\frac{5x-2}{3} - \left(x - \frac{2x-1}{3}\right) = \frac{4}{3}x - 1$		

Esercizio 6 Risolvi le seguenti equazioni eseguendone poi la verifica, cioè controllando che la soluzione trovata soddisfi l'uguaglianza

$$\begin{array}{ll}
 6.1 & 4(2x + 1) - 23 = 3(3 - 2x) & S = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \\
 6.2 & 9(x - 2) = 13(x + 3) - 9 & S = \{-12\} \\
 6.3 & \frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} = x - 2 & S = \{6\} \\
 6.4 & \frac{x+1}{10} - \frac{2x+1}{5} = \frac{2x-1}{5} - \frac{x-1}{2} + 1 & S = \{-7\} \\
 6.5 & (x-3)(2x+5) + (x-2)^2 = 3(x^2 - 4x + 1) & S = \{2\}
 \end{array}$$

Esercizio 7 Discuti l'esistenza delle soluzioni delle seguenti equazioni stabilendo se esse sono determinate indeterminate o impossibili

$$\begin{array}{ll}
 7.1 & 5(x-1) + 2x = 7(x-1) + 2 & \text{indeterminata} \\
 7.2 & 3(x-4) - 4(x-3) - 20 = 2(3x-10) - 7x & \text{indeterminata} \\
 7.3 & \frac{2x-5}{4} + \frac{x-2}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{5 \cdot (2-x)}{6} & \text{indeterminata} \\
 7.4 & \frac{x-5}{2} - \frac{x+9}{3} = x-4 + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}x & \text{impossibile} \\
 7.5 & (x-1)^2 + 10x = (x-2)(x+3) + 7x & \text{impossibile}
 \end{array}$$

Esercizio 8 Trova l'equazione risolvente dei seguenti problemi aritmetici e risolvila:

- 8.1 La differenza fra un numero e la terza parte del suo successivo è pari a 17. Di che numero si tratta? [26]
- 8.2 Un numero è tale che la differenza fra il suo quadrato e il suo doppio è uguale alla differenza fra il quadrato del suo precedente e il numero stesso. Trova il numero. [1]

6 Relazioni fra grandezze, proporzionalità diretta ed inversa

6.1 Proporzioni

Ricorda le definizioni

- Si dice rapporto il risultato di una divisione.
 - Si dice proporzione un'uguaglianza fra due (o più) rapporti:
★ Esempio ★ $5 : 9 = 25 : 45$ che si legge "cinque sta a nove come venticinque sta a quarantacinque".
 - In una proporzione il primo e il terzo termine si dicono **antecedenti**, il secondo e il quarto termine si dicono **conseguenti**:
★ Esempio ★ Nella proporzione $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = 4 : 6$ gli antecedenti sono $\frac{1}{2}$ e 4, i conseguenti sono $\frac{3}{4}$ e 6;
 - In una proporzione il primo e il quarto termine si dicono **estremi**, il secondo e il terzo termine si dicono **medi**:
★ Esempio ★ Nella proporzione $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = 4 : 6$ gli estremi sono $\frac{1}{2}$ e 6, i medi sono $\frac{3}{4}$ e 4;
 - Si chiama **continua** una proporzione i cui medi sono uguali:
★ Esempio ★ $12 : 6 = 6 : 3$ è una proporzione continua.
-

Ripassiamo brevemente le proprietà delle proporzioni

- 1 Proprietà **fondamentale** delle proporzioni: in una proporzione $a : b = c : d \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ qualunque il prodotto dei medi è **sempre** uguale al prodotto degli estremi:

★ Esempio ★ $\frac{2}{3} : \frac{1}{5} = \frac{5}{2} : \frac{3}{4}$ è una proporzione perché vale la proprietà fondamentale visto che $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

- 2 Proprietà **del permutare**: data una proporzione se ne ottiene un'altra equivalente (cioè in cui vale la proprietà fondamentale) se si scambiano fra loro i medi, oppure gli estremi, oppure sia i medi che gli estremi

★ Esempio ★ Dalla proporzione $4 : 7 = 16 : 28$ si ottengono le tre proporzioni vere $4 : 16 = 7 : 28$, $28 : 7 = 16 : 4$, $28 : 16 = 7 : 4$

- 3 Proprietà **dell'invertire**: data una proporzione se ne ottiene un'altra equivalente (cioè in cui vale la proprietà fondamentale) se si scambiano in essa ciascun antecedente con il proprio conseguente

★ Esempio ★ Dalla proporzione $4 : 7 = 16 : 28$ si ottiene, applicando la proprietà dell'invertire $7 : 4 = 28 : 16$

- 4 Proprietà del **comporre**: data una proporzione se ne ottiene un'altra se si sostituisce a **ciascun** antecedente la somma fra quell'antecedente e il suo conseguente, e ciò vale anche per i conseguenti secondo lo schema:

★ Esempio ★ Dalla proporzione $10 : 6 = 5 : 3$ si ottengono le proporzioni
 $(10 + 6) : 6 = (5 + 3) : 3$ e $10 : (10 + 6) = 5 : (5 + 3)$

- 5 Proprietà dello **scomporre**: data una proporzione se ne ottiene un'altra se si sostituisce a **ciascun** antecedente la differenza fra quell'antecedente e il suo conseguente, e ciò vale anche per i conseguenti, secondo lo schema:
- $$a : b = c : d \Rightarrow (a - b) : b = (c - d) : d$$
- oppure
- $$a : b = c : d \Rightarrow a : (a - b) = c : (c - d)$$

★ Esempio ★ Dalla proporzione $10 : 6 = 5 : 3$ si ottengono le proporzioni
 $(10 - 6) : 6 = (5 - 3) : 3$ e $10 : (10 - 6) = 5 : (5 - 3)$

- 6 Per trovare il termine incognito di una proporzione si utilizza la proprietà fondamentale e procede così :

1) Se il termine incognito è un medio si moltiplicano fra loro gli estremi e si divide per il medio noto

$$\star \text{Esempio} \star \frac{1}{3} : x = \frac{10}{3} : \frac{50}{7} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \cdot \frac{50}{7} : \frac{10}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{50}{7} \cdot \frac{3}{10} = \frac{5}{7}$$

2) Se il termine incognito è un estremo si moltiplicano fra loro i medi e si divide per l'estremo noto

$$\star \text{Esempio} \star 14 : 7 = 8 : x \Rightarrow x = 7 \cdot 8 : 14 = 56 : 14 = 4$$

Esercizio 1 Individua quali fra le seguenti coppie di rapporti formano una proporzione (puoi fare uso della proprietà fondamentale, o della definizione di proporzione come uguaglianza fra due rapporti):

$$32 : 4 \text{ e } 64 : 8 \begin{cases} \text{si} \circ \\ \text{no} \circ \end{cases}$$

$$72 : 9 \text{ e } 48 : 8 \begin{cases} \text{si} \circ \\ \text{no} \circ \end{cases}$$

$$30 : 2 \text{ e } 160 : 20 \begin{cases} \text{si} \circ \\ \text{no} \circ \end{cases}$$

$$90 : 10 \text{ e } 27 : 3 \begin{cases} \text{si} \circ \\ \text{no} \circ \end{cases}$$

$$\frac{3}{4} \text{ e } \frac{9}{160} \begin{cases} \text{si} \circ \\ \text{no} \circ \end{cases}$$

$$\frac{8}{3} \text{ e } \frac{16}{9} \begin{cases} \text{si} \circ \\ \text{no} \circ \end{cases}$$

$$2,4 : 0,3 \text{ e } 1,6 : 0,4 \begin{cases} \text{si} \circ \\ \text{no} \circ \end{cases}$$

$$6 : 1,2 \text{ e } 2 : 0,4 \begin{cases} \text{si} \circ \\ \text{no} \circ \end{cases}$$

$$\frac{22}{7} : \frac{3}{11} \text{ e } \frac{6}{7} : \frac{1}{2} \begin{cases} \text{si} \circ \\ \text{no} \circ \end{cases}$$

Esercizio 2 Individua mentalmente se ciascuna delle seguenti proporzioni è vera o falsa in base alla proprietà fondamentale

a) $4:3=6:5$ V F

d) $3:2=4:5$ V F

g) $7:2=14:4$ V F

b) $5:3=10:6$ V F

e) $4:3=2:1$ V F

h) $9:3=6:2$ V F

c) $3:5=4:2$ V F

f) $4:8=3:6$ V F

i) $10:4=8:3$ V F

Esercizio 3 Completa la tabella seguendo l'esempio

Proporzione	Antecedenti	Conseguenti	Medi	Estremi	Valore del rapporto
$30 : 5 = 12 : 2$	30 e 12	5 e 2	5 e 12	30 e 2	$30 : 5 = 6$
$20 : 30 = 4 : 6$					
$8 : 4 = 20 : 10$					
$20 : 25 = 4 : 5$					
$30 : 6 = 20 : 4$					
$12 : 6 = 6 : 3$					

Esercizio 4 Completa la tabella come nell'esempio svolto

1 ^a proporzione	2 ^a proporzione	proprietà applicata
$9:15=3:5$	$15:9=5:3$	invertire
$30:3=20:2$	$30:20=3:2$	
$6:3=20:10$	$10:3=20:6$	
$20:5=16:4$	$5:20=4:16$	
$30:6=20:4$	$4:20=6:30$	
$12:6=6:3$	$(12+6):6=(6+3):3$	
$40:16=5:2$	$(40-16):16=(5-2):2$	

Esercizio 5 Risolvi le proporzioni

$$6 : x = 3 : 2 \quad 6 : 9 = x : 18 \quad 15 : 20 = 6 : x \quad [4; 12; 18]$$

$$6 : 2 = 15 : x \quad 45 : 6 = 15 : x \quad 18 : x = 12 : 4 \quad [5; 2; 6]$$

$$\frac{8}{3} : \frac{5}{7} = \frac{14}{5} : x \quad 0,4 : 0,9 = x : 5,4 \quad \frac{6}{5} : x = \frac{14}{15} : \frac{7}{4} \quad \left[\frac{3}{4}; \frac{12}{5}; \frac{9}{4} \right]$$

$$\frac{3}{4} : \frac{9}{8} = x : \frac{8}{3} \quad \frac{9}{4} : \frac{3}{8} = \frac{9}{2} : x \quad \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{3}{4} : x \quad \left[\frac{16}{9}; \frac{3}{4}; \frac{2}{3} \right]$$

Esercizio 6 Risolvi le proporzioni continue

$$2 : x = x : 32 \quad 9 : x = x : 4 \quad 18 : x = x : 8 \quad [8; 6; 12]$$

$$3 : x = x : 27 \quad 48 : x = x : 12 \quad 12 : x = x : 75 \quad [9; 24; 30]$$

$$\frac{9}{25} : x = x : \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} : x = x : \frac{16}{3} \quad \frac{1}{27} : x = x : \frac{4}{3} \quad \left[\frac{3}{10}; \frac{4}{3}; \frac{2}{9} \right]$$

Esercizio 7 Risolvi le seguenti proporzioni applicando le proprietà del comporre o dello scomporre :

$$(6 + x) : x = 15 : 10 \quad (4 + x) : x = 7 : 3 \quad (7 - x) : x = 15 : 6 \quad [12; 3; 2]$$

$$(8 - x) : x = 12 : 6 \quad (5 + x) : x = 40 : 8 \quad 34 : 18 = (8 + x) : x \quad \left[\frac{8}{3}; \frac{5}{4}; 9 \right]$$

$$12 : 42 = x : (18 - x) \quad 36 : 9 = (10 - x) : x \quad 48 : 36 = (x + 7) : x \quad [4; 2; 21]$$

Esercizio 8 Trova i due termini incogniti x e y applicando la proprietà del comporre o dello scomporre in maniera opportuna

$$x : y = 5 : 15 \quad \text{essendo} \quad x + y = 12 \quad [3; 9]$$

$$x : y = 5 : 35 \quad \text{essendo} \quad x + y = 56 \quad [7; 49]$$

$$x : y = 18 : 12 \quad \text{essendo} \quad x - y = 12 \quad [36; 24]$$

$$x : y = 95 : 25 \quad \text{essendo} \quad x + y = 24 \quad [19; 5]$$

Esercizio 9 Con l'ausilio di una proporzione, risolvi i problemi (costruisci la figura)

In un triangolo rettangolo la somma delle misure dei catetivale $c_1 + c_2 = 92 \text{ cm}$ ed essi stanno nella proporzione $c_1 : c_2 = 8 : 15$. Calcola la misura dei cateti del triangolo e il suo perimetro [32 cm; 60 cm; 160 cm]

In un rettangolo il perimetro misura 210 m ed il rapporto fra le due dimensioni è $\frac{2}{19}$. Calcola l'area del rettangolo. [950m²]

In un triangolo rettangolo i due angoli acuti hanno per rapporto $\frac{11}{7}$. Calcola le loro ampiezze. [55°; 35°]

6.2 Proporzionalità diretta ed inversa fra grandezze

Si chiama *grandezza* una qualunque quantità misurabile: per poter misurare una grandezza è necessario fissare una *unità di misura* (presa come campione unitario della grandezza da misurare), e dei multipli e sottomultipli di tale unità di misura.

La misura di una grandezza G per via diretta, si effettua contando quante volte l'unità di misura (ed eventualmente i suoi sottomultipli) sono contenuti in G .

Alcuni esempi di grandezza e di unità di misura corrispondenti sono:

grandezza	unità di misura (nel sistema internazionale)	simbolo della udm
tempo	secondo	s
lunghezza	metro	m
massa	chilogrammo	kg
temperatura	grado centigrado (o Kelvin)	$^{\circ}C(K)$
intensità di corrente	Ampère	A
velocità	metri al secondo	m/s
peso(forza)	Newton	N

Ricordiamo le definizioni di insiemi (o *classi*) di grandezze direttamente e inversamente proporzionali

<p>Due insiemi di grandezze $Y = \{y_1, y_2 \dots y_n\}$ e $X = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ si dicono direttamente proporzionali se raddoppiando / triplicando / quadruplicandole grandezze del primo insieme (X), raddoppiano / triplicano / quadruplicano anche le corrispondenti grandezze del secondo insieme (Y)</p>	<p>se due insiemi di grandezze sono direttamente proporzionali, allora è costante il <i>rapporto</i> $k = \frac{y_a}{x_a}$ fra una grandezza del secondo insieme e quella che le corrisponde nel primo insieme, tale costante si dice coefficiente di proporzionalità diretta (k_{DIR})</p>
<p>★ Il perimetro (Y) di un quadrato è direttamente proporzionale al suo lato (X)</p>	<p>è costante ed uguale a 4 il rapporto fra il perimetro di un quadrato generico e il suo lato</p>
<p>• La quantità di lavoro svolta (Y) è (in prima approssimazione) direttamente proporzionale al tempo impiegato per svolgerla (X)</p>	<p>è quindi costante il rapporto fra la quantità di lavoro svolta e il tempo impiegato a svolgerla</p>
<p>☉ Il costo di quella merce (Y) è (in prima approssimazione) direttamente proporzionale al quantitativo di merce acquistato (X)</p>	<p>è quindi costante il rapporto tra il denaro speso per acquistare un prodotto e il suo quantitativo e tale rapporto si misura in N/kg</p>
<p>Due insiemi di grandezze $Y = \{y_1, y_2 \dots y_n\}$ e $X = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ si dicono inversamente proporzionali se raddoppiando / triplicando / quadruplicandole grandezze del primo insieme (X), le corrispondenti grandezze del secondo insieme (Y) diventano la metà / un terzo / un quarto</p>	<p>se due insiemi di grandezze sono inversamente proporzionali, allora è costante il <i>prodotto</i> $k = y_a \cdot x_a$ fra una grandezza del secondo insieme e quella che le corrisponde nel primo insieme; tale costante si dice coefficiente di proporzionalità inversa (k_{INV})</p>
<p>★ Il numero di operai (Y) è (in prima approssimazione) inversamente proporzionale al tempo impiegato a svolgere un lavoro fissato (X)</p>	<p>è quindi costante il prodotto fra il numero di operai e il tempo impiegato per svolgere un fissato lavoro</p>
<p>☉ La velocità (Y) a cui ci si muove compiendo un tragitto fissato è inversamente proporzionale al tempo impiegato (X)</p>	<p>è quindi costante il prodotto fra la velocità e il tempo impiegato e tale rapporto è la lunghezza del percorso</p>

Infine:

- il grafico della relazione di proporzionalità diretta è una (semi)retta che passa per l'origine;
- il grafico della relazione di proporzionalità inversa è un (ramo di) iperbole

Esercizio 1 Considera la funzione $y = 3x$ e completa le seguenti frasi:

- La funzione $y = 3x$ esprime una legge di proporzionalità
- Il coefficiente di proporzionalità è
- Se il valore di x è 5, il valore di y è
- Se il valore di y è $\frac{1}{3}$, il valore di x è
- Il grafico della funzione è

Esercizio 2 Considera la funzione $y = \frac{5}{x}$ e completa le seguenti frasi:

- La funzione $y = \frac{5}{x}$ esprime una legge di proporzionalità
- Il coefficiente di proporzionalità è
- Se il valore di x è 10, il valore di y è

- d) Se il valore di y è 5, il valore di x è;
- e) Il grafico della funzione è

Esercizio 3 Indica se ciascuna delle seguenti uguaglianze esprime o no una legge di proporzionalità diretta:

- a) $y = x$ V F d) $y = 4x$ V F g) $y = \frac{5}{3}x$ V F
- b) $y = 3x + 1$ V F e) $y = -x$ V F h) $y = \frac{4}{3}x + 1$ V F
- c) $y = x - 1$ V F f) $y = x^2$ V F i) $y = 3 - 2x$ V F

Esercizio 4 Indica se ciascuna delle seguenti uguaglianze esprime o no una legge di proporzionalità inversa:

- a) $y = 3x + 1$ V F d) $y = \frac{15}{x}$ V F g) $y = \frac{3}{5}x$ V F
- b) $y = \frac{2}{x}$ V F e) $y = \frac{1}{x^2}$ V F h) $y = \frac{4}{3x}$ V F
- c) $xy = 10$ V F f) $x = \frac{4}{y}$ V F i) $y = \frac{3}{2x} - 2$ V F

Esercizio 5 Indica se ciascuna delle affermazioni che seguono è vera o falsa e giustifica la risposta:

- a) Il lato ed il perimetro di un triangolo equilatero sono grandezze direttamente proporzionali V F
- b) Il lato ed il perimetro di un quadrato sono grandezze direttamente proporzionali V F
- c) Il lato e l'area di un quadrato sono grandezze direttamente proporzionali V F
- d) L'uguaglianza $y = 3 \cdot x$ rappresenta una relazione di proporzionalità diretta V F
- e) L'uguaglianza $y = x^2$ rappresenta una relazione di proporzionalità inversa V F
- f) L'uguaglianza $y = 5x + 2$ rappresenta una relazione di proporzionalità diretta V F

- g) Due grandezze sono direttamente proporzionali se è costante la somma dei loro valori corrispondenti V F
- h) Due grandezze sono inversamente proporzionali se è costante il prodotto dei loro valori corrispondenti V F
- i) La base e l'altezza di rettangoli equivalenti sono grandezze inversamente proporzionali V F
- l) L'uguaglianza $xy = 12$ rappresenta una legge di proporzionalità inversa V F

Esercizio 6 Per ognuna delle tabelle che seguono, rappresenta le grandezze nel piano cartesiano, specifica se si tratta di relazioni di proporzionalità diretta o inversa, trova il coefficiente di proporzionalità e scrivi la relazione fra y e x .

x	3	6	9	12
y	4	8	12	16

x	2	4	8	12
y	12	6	3	2

x	2	5	10	20
y	40	16	8	4

$$\left[k_D = \frac{4}{3}; k_I = 24; k_I = 80 \right]$$

x	4	5	7	9
y	12	15	21	27

x	3	6	18	27
y	18	9	3	2

x	5	10	15	20
y	3	6	9	12

$$\left[k_D = 3; k_I = 54; k_D = \frac{5}{3} \right]$$

x	3	6	12	30
y	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$

x	1	3	9	27
y	81	27	9	3

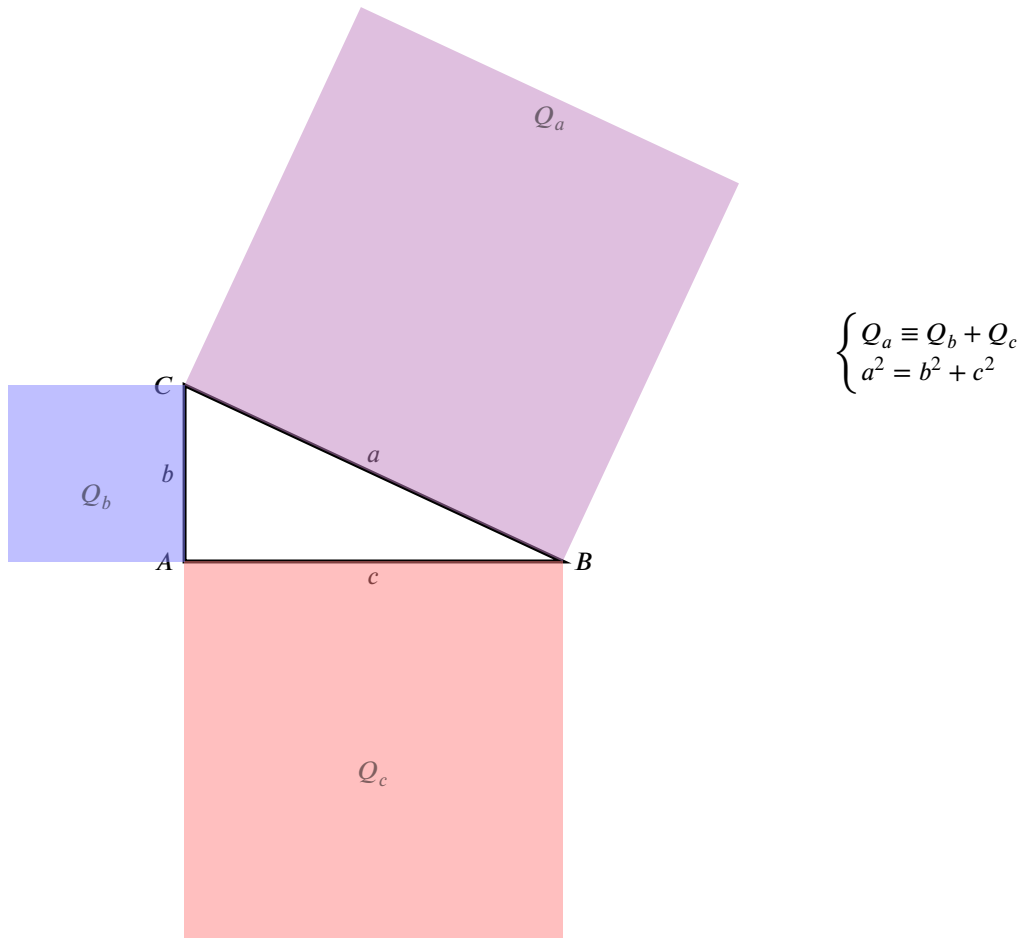
x	5	10	15	20
y	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2

$$\left[k_I = 15; k_I = 81; k_D = \frac{1}{10} \right]$$

7 Teorema di Pitagora

Ricorda l'enunciato del teorema di Pitagora:

“In qualunque triangolo rettangolo l'area del quadrato che ha come lato l'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati che hanno come lati i cateti.”



Il teorema di Pitagora ha moltissime applicazioni nella geometria elementare, vediamo alcune riferendoci alle figure della pagina successiva:

1. Calcolo della diagonale di un rettangolo di base b e altezza h date.

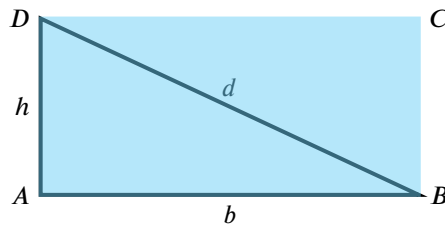


Figura 1: Basta osservare che la diagonale d divide il rettangolo in due triangoli rettangoli congruenti per ottenere, applicando su tali triangoli il teorema di Pitagora, le relazioni : $d = \sqrt{b^2 + h^2}$, oppure le formule inverse $b = \sqrt{d^2 - h^2}$, $h = \sqrt{d^2 - b^2}$.

2. Calcolo della diagonale di un quadrato di lato l dato.

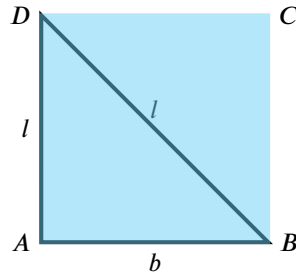


Figura 2: Con un ragionamento analogo a quello fatto per il rettangolo si trova : $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2}$, cioè $d = l \cdot \sqrt{2}$, oppure viceversa $l = \frac{d}{\sqrt{2}}$. (Il numero irrazionale $\sqrt{2}$ vale $\sqrt{2} = 1,4142 \dots$)

3. Calcolo dell'altezza di un triangolo ISOSCELE di base b e lato obliquo l dati.

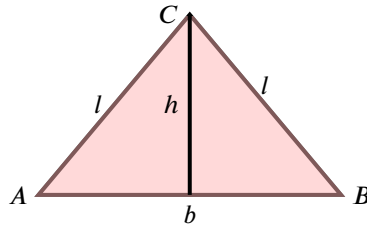


Figura 3: Basta osservare che l'altezza h divide il triangolo isoscele in due triangoli rettangoli congruenti che hanno cateti h e $\frac{b}{2}$ per ottenere: $l = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2}$, oppure le formule inverse $h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$, $\frac{b}{2} = \sqrt{l^2 - h^2}$.

4. Calcolo del lato l di un rombo di diagonali d_1 e d_2 date.

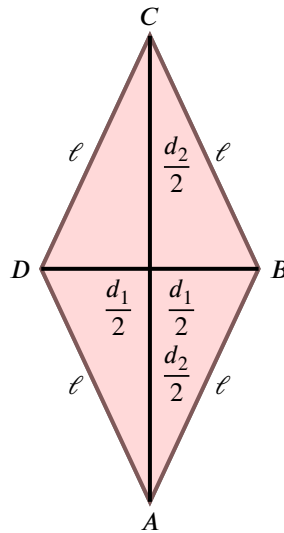


Figura 4: Basta osservare che le diagonali dividono il rombo in quattro triangoli rettangoli congruenti di cateti $\frac{d_1}{2}$ e $\frac{d_2}{2}$; applicando a uno qualunque dei triangoli il teorema di Pitagora si trovano le relazioni: $l = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$, oppure la formula inversa $\frac{d_1}{2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$

5. Calcolo del lato obliquo l di un trapezio isoscele di altezza h , base maggiore b_2 e base minore b_1 :

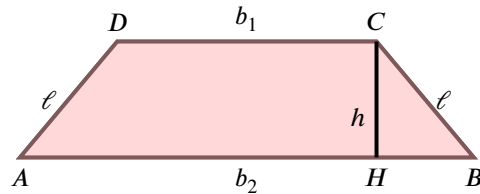


Figura 5: Osserviamo che le altezze dividono il trapezio isoscele in un rettangolo e due triangoli rettangoli congruenti (vedi figura) di cateti h e $\frac{b_2 - b_1}{2}$. Applicando il teorema di Pitagora a tali triangoli si ottengono le relazioni $l = \sqrt{\left(\frac{b_2 - b_1}{2}\right)^2 + h^2}$, o le inverse $h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{b_2 - b_1}{2}\right)^2}$, $\frac{b_2 - b_1}{2} = \sqrt{l^2 - h^2}$

Esercizio 1 Con l'aiuto delle tavole numeriche verifica quali delle seguenti terne sono pitagoriche e quali non lo sono come nell'esempio:

$a = 77, b = 36, c = 85$ è una terna pitagorica poiché $77^2 + 36^2 = 5929 + 1296 = 7225$ e $85^2 = 7225$, ma $a = 5, b = 6, c = 7$ NON è una terna pitagorica poiché $5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$ e $7^2 = 49 \neq 61$

$$a=7, b=24, c=25$$

$$25^2 = 24^2 + 7^2$$

$$a=8, b=15, c=17$$

$$17^2 = 15^2 + 8^2$$

$$a=5, b=6, c=12$$

no

$$a=12, b=35, c=37$$

$$a=7, b=8, c=15$$

$$a=55, b=48, c=73$$

$$a=10, b=12, c=17$$

$$a=15, b=112, c=113$$

Esercizio 2 Facendo uso del teorema di Pitagora trova il lato incognito nei seguenti triangoli rettangoli (a è la misura

dell'ipotenusa), seguendo gli esempi indicati:

c	b	a
3 cm	4 cm	quindi $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3^2 + 4^2 = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$
8 cm	quindi $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$	17
quindi	40 cm	58 cm
21 cm	20 cm	quindi
5 cm	quindi	13 cm
quindi	1,5 cm	2,5 cm
92 cm	69 cm	quindi

Esercizio 3 Calcola la misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo conoscendo le misure dei cateti, che sono di 70 cm e 24 cm.

Esercizio 4 Calcola la misura del cateto di un triangolo rettangolo sapendo che l'ipotenusa misura 130 m e l'altro cateto 32 m.

Esercizio 5 L'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura 65 cm e uno dei suoi cateti 52 cm. Calcola il perimetro e l'area del triangolo.

Esercizio 6 Risolvi i seguenti problemi che richiedono l'applicazione del teorema di Pitagora disegnando con precisione la figura e scrivendone proprietà e relazioni

- 1- In un triangolo isoscele la base e l'altezza ad essa relativa misurano rispettivamente 84 cm e 40 cm. Calcola il perimetro del triangolo. [200 cm]
- 2- In un triangolo isoscele il lato obliquo misura 178 cm ed il perimetro 512 cm. Calcola la misura della base del triangolo e la sua area. [156 cm; 12480 cm²].
- 3- In un triangolo isoscele il cui perimetro è 392 cm. la base misura 132 cm. Calcola l'area del triangolo. [7392 cm²].
- 4- In un triangolo isoscele la base e l'altezza sono una i $\frac{16}{15}$ dell'altra e la differenza delle loro misure vale 11 cm. Calcola il perimetro e l'area del triangolo isoscele. [550 cm; 14520 cm²]
- 5 In un rettangolo la misura delle dimensioni è 17 cm e 144 cm. Calcola la misura del perimetro, dell'area e della diagonale del rettangolo. [322 cm; 2448 cm²; 145 cm]
- 6- In un rettangolo la diagonale misura 4,1 m e l'altezza 0,9 m. Calcola le misure del perimetro e dell'area del rettangolo. [9,8 m; 3,6 m²]
- 7- Un appezzamento di terreno ha forma di un rettangolo di area 98280 m² e base 351 m. Calcola la misura del perimetro e della diagonale del rettangolo. [1262 m; 449 m]
- 8- In un rettangolo la base e la diagonale misurano rispettivamente 7,7 cm e 8,5 cm. Calcola il perimetro e l'area del rettangolo. [22,6 cm; 27,72 cm²]

- 9- In un rettangolo la diagonale misura 4,1 m e l'altezza 0,9 m. Calcola le misure del perimetro e dell'area del rettangolo. [9,8 m; 3,6 m²]
- 10- Un triangolo rettangolo è equivalente ad un rettangolo avente le due dimensioni lunghe 7,2 cm e 4 cm. Calcola il perimetro del triangolo sapendo che un suo cateto misura 16 cm. [36 cm]
- 11- Le diagonali di una aiuola a forma di rombo misurano 19,2 m e 14,4 m rispettivamente. Calcola l'area e il perimetro dell'aiuola. [138,24 m²; 48 m]
- 12- Il perimetro di un rombo misura 360 cm e la diagonale minore è di 108 cm. Quanto vale la superficie del rombo? [7776 cm²].
- 13- Il perimetro di un rombo misura 26 cm e una diagonale di 6,6 cm. Quanto vale l'area del rombo? [36,96 cm²]
- 14- Un rombo, avente area di 1080 m², ha una diagonale di misura 30 m. Calcola il perimetro del rombo.
- 15 - In un rombo, la somma delle lunghezze delle diagonali misura 294 cm ed una diagonale è $\frac{4}{3}$ dell'altra. Calcola perimetro, area e altezza del rombo. [420cm; 10584 cm²; 100,8 cm].
- 16- In un trapezio rettangolo le basi e l'altezza misurano rispettivamente 26 cm, 86 cm e 80 cm. Calcola area e perimetro del trapezio. [4480 cm²; 292 cm]

Indice

1 Numeri naturali e proprietà delle potenze	1
2 Scomposizioni in fattori, MCD e mcm	4
2.1 scomposizione in fattori	4
2.2 M.C.D e m.c.m.	4
3 L'insieme dei razionali assoluti	6
3.1 Numeri decimali e frazioni	7
4 L'insieme dei razionali relativi	9
5 Espressioni letterali ed equazioni	11
5.1 Espressioni letterali	11
5.2 Equazioni	13
6 Relazioni fra grandezze, proporzionalità diretta ed inversa	17
6.1 Proporzioni	17
6.2 Proporzionalità diretta ed inversa fra grandezze	20
7 Teorema di Pitagora	24